ISSN 2220-5438

Reprint from

Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory

Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory Volume 7 • Issue 1 2017

URSS

МФТИ

URSS

Volume 7 • Issue 1 2017

Moscow Journal
of Combinatorics
and Number Theory
2017, vol. 7, iss. 1,
pp. 3–23, [pp. 3–23]

Sur la variation totale de la suite des parties fractionnaires des quotients d'un nombre réel positif par les nombres entiers naturels consécutifs

Michel Balazard (Marseille)

Abstract: We give an asymptotic formula for the total variation of the sequence of fractional parts of the quotients of a positive real number by the consecutive natural numbers:

$$\sum_{n\geqslant 1}|\{x/(n+1)\}-\{x/n\}| = \frac{2}{\pi}\zeta(3/2)x^{1/2}+O(x^{2/5}).$$

Keywords: Arithmetic functions, fractional part, total variation

AMS Subject Classification: 11N37

Received: 17.11.2015; **revised:** 09.06.16

1. Introduction

La quantité décrite par le titre de cet article est

$$W(x) = \sum_{n\geqslant 1}|\{x/(n+1)\}-\{x/n\}| \quad (x>0),$$

où $\{t\} = t - \lfloor t\rfloor$ désigne la partie fractionnaire du nombre réel t, et $\lfloor t\rfloor$ sa partie entière. La lettre W est choisie en référence au mathématicien Aurel Wintner (1903–1958). Dans un article de 1946, *Square root estimates of arithmetical sum functions* (cf. [5]), il considéra la fonction $W(x)$ dans le contexte suivant.

Soit f une fonction arithmétique à valeurs réelles ou complexes dont la fonction sommatoire

$$F(x) = \sum_{n \leqslant x} f(n) \quad (x > 0) \tag{1}$$

est bornée. En particulier, la série

$$C = \sum_{n \geqslant 1} \frac{f(n)}{n} = \sum_{k \geqslant 1} \frac{F(k)}{k(k+1)} = \int_0^\infty F(t) \frac{dt}{t^2}$$

est alors convergente.

En notant $*$ le produit de convolution de Dirichlet des fonctions arithmétiques, posons $g = f * \mathbf{1}$:

$$g(n) = \sum_{d \mid n} f(d) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

On a

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{n \leqslant x} g(n) \\ &= \sum_{n \geqslant 1} f(n) \lfloor x/n \rfloor \\ &= Cx - \sum_{n \geqslant 1} f(n) \{x/n\} \\ &= Cx + \sum_{n \geqslant 1} F(n) \big(\{x/(n+1)\} - \{x/n\} \big). \end{aligned}$$

On en déduit l'estimation

$$|G(x) - Cx| \leqslant \|F\|_\infty W(x) \quad (x > 0),$$

où $\|F\|_\infty$ désigne la borne supérieure des modules des sommes (1). Dans [5], Wintner démontra que

$$W(x) \asymp x^{1/2} \quad (x \geqslant 1). \tag{2}$$

On a donc $G(x) = Cx + O(x^{1/2})$. En outre, ce résultat est optimal au sens où, quelle que soit la fonction positive $\omega(x)$, définie pour $x > 0$ et telle que

$$\omega(x) = o(x^{1/2}) \quad (x \to \infty),$$

il existe une fonction arithmétique f, dont la fonction sommatoire est bornée, et pour laquelle la relation

$$G(x) = Cx + O(\omega(x)) \tag{3}$$

est fausse. Ce dernier fait découle de la minoration $W(x) \gg x^{1/2}$ et du principe de condensation des singularités (théorème de Banach et Steinhaus, cf. [1] *)).

De plus Wintner remarqua que ces résultats se déduisaient uniquement de (2), et non de l'existence de la limite $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-1/2}W(x)$, problème qu'il laissa ouvert et qui est l'origine du présent travail.

Cela étant, on peut se passer complètement de l'introduction de la fonction W et de considérations d'analyse fonctionnelle, aussi bien pour l'estimation $G(x) = Cx + O(x^{1/2})$ que pour l'optimalité de son terme d'erreur. D'une part, le principe de l'hyperbole de Dirichlet donne

$$G(x) = \sum_{n\leqslant\sqrt{x}} f(n)\lfloor x/n\rfloor + \sum_{m\leqslant\sqrt{x}} F(x/m) - F(\sqrt{x})\lfloor\sqrt{x}\rfloor,$$

d'où découle simplement l'estimation de $G(x)$. D'autre part, Bayart a construit, dans le contexte de l'étude de l'abscisse de convergence d'un produit de séries de Dirichlet (cf. [2], §2), un exemple d'une fonction arithmétique f dont la fonction sommatoire est bornée, et pour laquelle l'assertion

$$G(x) = Cx + o(x^{1/2}) \quad (x \to \infty)$$

est fausse; la même fonction f permet donc d'infirmer d'un coup toutes les assertions (3). Cette construction est rappelée au §3.

L'argumentation de Wintner a cependant, entre autres mérites, celui d'attirer l'attention sur la question de l'estimation asymptotique de $W(x)$.

*) C'est le *uniform boundedness principle* de la littérature en langue anglaise ; Wintner invoqua le "Lebesgue-Toeplitz norm principle".

THÉORÈME. *Pour* $x > 0$, *on a*

$$W(x) = \frac{2}{\pi}\zeta(3/2)\sqrt{x} + O(x^{2/5}),$$

où ζ *désigne la fonction* ζ *de Riemann.*

La nature de la somme $W(x)$ incite à l'analyse de la répartition conjointe des deux fonctions

$$n \mapsto \lfloor x/n \rfloor \quad \text{et} \quad n \mapsto \lfloor x/(n+1) \rfloor.$$

Nous développons au §2 cette approche. Elle nous conduit à regrouper les termes de $W(x)$ suivant les valeurs d de la différence $\lfloor x/n \rfloor - \lfloor x/(n+1) \rfloor$; le résultat des calculs qui s'ensuivent est l'objet des propositions 1 et 6 (cf. §2.3 et §2.4.7 ci-dessous). Le théorème s'en déduit par sommation au §§2.5-2.6.

La méthode employée est susceptible d'autres applications. Ainsi, des calculs similaires †) fournissent l'énoncé suivant :

$$\sum_{n\geqslant 1}\Big(\{x/(n+1)\} - \{x/n\}\Big)^2 = \frac{\zeta(3/2)}{\pi}\sqrt{x} + O(x^{3/7}) \quad (x > 0).$$

2. Démonstration du théorème

Dans toute la suite, la lettre n désignera un nombre entier $\geqslant 1$; les lettres h, k, d désigneront des nombres entiers $\geqslant 0$; la lettre x désignera un nombre réel > 0.

2.1. Réarrangement de la somme $W(x)$

Nous réarrangeons la somme $W(x)$ suivant les valeurs de

$$k = \lfloor x/n \rfloor$$
$$h = \lfloor x/(n+1) \rfloor.$$

On a donc $0 \leqslant h \leqslant k \leqslant x$ et

$$k \leqslant x/n < k+1$$
$$h \leqslant x/(n+1) < h+1,$$

†) Les détails sont disponibles à l'adresse hal.archives-ouvertes.fr/hal-01329292.

autrement dit

$$\max\left(\frac{x}{k+1}, \frac{x}{h+1} - 1\right) < n \leqslant \min\left(\frac{x}{k}, \frac{x}{h} - 1\right). \tag{4}$$

(avec la convention $x/0 = \infty$). Nous désignerons par $I(h, k; x)$ l'intervalle de valeurs de n défini par l'encadrement (4), c'est-à-dire

$$I(h, k; x) = \{1, 2, \ldots\} \cap \left]x/(k+1), x/k\right] \cap \left]x/(h+1) - 1, x/h - 1\right].$$

Il faut garder à l'esprit que, x étant fixé, la collection des $I(h, k; x)$ non vides constitue une partition de l'ensemble des nombres entiers $\geqslant 1$.

Notons que, pour $n \in I(h, k; x)$, on a

$$\{x/(n+1)\} - \{x/n\} = k - h - x/n(n+1).$$

On a donc

$$W(x) = \sum_{0 \leqslant h \leqslant k \leqslant x} W(h, k; x),$$

où

$$W(h, k; x) = \sum_{n \in I(h,k;x)} |k - h - x/n(n+1)|.$$

Maintenant, si $0 \leqslant d \leqslant x$, nous posons

$$\begin{aligned} E_d(x) &= \{(h, k) : 0 \leqslant h \leqslant k \leqslant x,\ k - h = d\} \\ &= \{(k-d, k) : d \leqslant k \leqslant x\} \end{aligned} \tag{5}$$

et

$$W_d(x) = \sum_{(h,k) \in E_d(x)} W(h, k; x) = \sum_{d \leqslant k \leqslant x} \ \sum_{n \in I(k-d,k;x)} |d - x/n(n+1)|\,,$$

de sorte que

$$W(x) = \sum_{0 \leqslant d \leqslant x} W_d(x).$$

Nous allons d'abord majorer la contribution à $W(x)$ des grandes valeurs de d, puis nous estimerons la quantité $W_d(x)$, en commençant par le cas diagonal $d = 0$.

2.2. Contribution des grandes valeurs de d

Soit D un nombre réel supérieur à 1. Si $d = \lfloor x/n \rfloor - \lfloor x/(n+1) \rfloor > D$, alors

$$\begin{aligned}\frac{x}{n^2} &> \frac{x}{n(n+1)}\\ &= d + \{x/n\} - \{x/(n+1)\}\\ &> D - 1,\end{aligned}$$

donc $n < \sqrt{x/(D-1)}$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{d>D} W_d(x) &\leqslant \sum_{n<\sqrt{x/(D-1)}} 1\\ &< \sqrt{x/(D-1)}.\end{aligned} \tag{6}$$

2.3. Estimation de $W_0(x)$

Nous avons

$$E_0(x) = \{(k,k) : 0 \leqslant k \leqslant x\}.$$

L'intervalle $I(k,k;x)$ est défini par l'encadrement

$$\frac{x}{k+1} < n \leqslant \frac{x}{k} - 1. \tag{7}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}W_0(x) &= \sum_{0\leqslant k\leqslant x} W(k,k;x)\\ &= \sum_{0\leqslant k\leqslant x} \sum_{x/(k+1)<n\leqslant x/k-1} x/n(n+1).\end{aligned}$$

Si $k(k+1) > x$, la somme intérieure est vide. Désignons donc par $K = K(x)$ le plus grand nombre entier k tel que $k(k+1) \leqslant x$, c'est-à-dire

$$K(x) = \lfloor \sqrt{x+1/4} - 1/2 \rfloor.$$

Pour $x > 0$, on a

$$W_0(x) = \sum_{0\leqslant k\leqslant K} \sum_{x/(k+1)<n\leqslant x/k-1} x/n(n+1)$$

$$
\begin{aligned}
&= x \sum_{0\leqslant k\leqslant K} \sum_{x/(k+1)<n\leqslant x/k} \frac{1}{n(n+1)} - x \sum_{1\leqslant k\leqslant K} \frac{1}{\lfloor x/k\rfloor(\lfloor x/k\rfloor+1)} \\
&= x \sum_{n>x/(K+1)} \frac{1}{n(n+1)} - x \sum_{1\leqslant k\leqslant K} \varphi(x/k), \qquad (8)
\end{aligned}
$$

où l'on a posé

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) &= \frac{1}{\lfloor t\rfloor(\lfloor t\rfloor+1)} \qquad (9)\\
&= t^{-2} + O(t^{-3}) \quad (t \geqslant 1).
\end{aligned}
$$

D'une part,

$$
\begin{aligned}
x \sum_{n>x/(K+1)} \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{x}{\lfloor x/(K+1)\rfloor+1} \\
&= \frac{K+1}{1+(1-\{x/(K+1)\})(K+1)/x} \\
&= K + O(1) \\
&= \sqrt{x} + O(1). \qquad (10)
\end{aligned}
$$

D'autre part,

$$
\begin{aligned}
x \sum_{1\leqslant k\leqslant K} \varphi(x/k) &= x \sum_{1\leqslant k\leqslant K} \bigl(k^2/x^2 + O(k^3/x^3)\bigr) \\
&= \frac{K^3+O(K^2)}{3x} + O(K^4/x^2) \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{x} + O(1). \qquad (11)
\end{aligned}
$$

La conjonction de (8), (10) et (11) donne le résultat suivant.

Proposition 1. *Pour $x > 0$, on a*

$$
W_0(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x} + O(1). \qquad (12)
$$

2.4. Estimation de $W_d(x)$, $d > 0$

2.4.1. Décomposition de l'ensemble $E_d(x)$

Si d est positif, nous allons décomposer l'ensemble $E_d(x)$ défini par (5) en une partition de trois sous-ensembles sur lesquels l'encadrement (4) s'exprimera sans recours aux fonctions max et min.

Si $k > h \geqslant 0$ et $x > 0$, l'inégalité

$$\frac{x}{k} \leqslant \frac{x}{h} - 1$$

équivaut à

$$\frac{hk}{k-h} \leqslant x.$$

En particulier, on a les implications

$$\frac{x}{k+1} \leqslant \frac{x}{h+1} - 1 \Longrightarrow \frac{x}{k} \leqslant \frac{x}{h} - 1$$

et

$$\frac{x}{k} > \frac{x}{h} - 1 \Longrightarrow \frac{x}{k+1} > \frac{x}{h+1} - 1.$$

Cela nous incite à considérer les trois parties suivantes de $E_d(x)$ (la définition de chaque $E_{d,i}(x)$ est suivie par la forme que prend l'encadrement (4) lorsque $(k-d, k) \in E_{d,i}(x)$) :

$$E_{d,1}(x) = \{(k-d, k) : d \leqslant k \leqslant x,\ (k-d+1)(k+1) \leqslant dx\}$$

$$\frac{x}{k-d+1} - 1 < n \leqslant \frac{x}{k} \tag{13}$$

$$E_{d,2}(x) = \{(k-d, k) : d \leqslant k \leqslant x,\ (k-d)k > dx\}$$

$$\frac{x}{k+1} < n \leqslant \frac{x}{k-d} - 1 \tag{14}$$

$$E_{d,3}(x) = \{(k-d, k) : d \leqslant k \leqslant x,\ (k-d)k \leqslant dx < (k-d+1)(k+1)\}$$

$$\frac{x}{k+1} < n \leqslant \frac{x}{k} \tag{15}$$

Celles des trois parties $E_{d,i}(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ qui sont non vides forment une partition de $E_d(x)$. Par conséquent, on a

$$W_d(x) = W_{d,1}(x) + W_{d,2}(x) + W_{d,3}(x),$$

où

$$W_{d,i}(x) = \sum_{(h,k)\in E_{d,i}(x)} W(h,k;x) \quad (1 \leqslant i \leqslant 3).$$

Avant d'évaluer successivement les trois quantités $W_{d,i}(x)$, nous allons aux paragraphes suivants définir et étudier deux fonctions auxiliaires, $K_d(x)$ et $N_d(x)$.

2.4.2. La fonction $K_d(x)$

Pour $x > 0$ et $d \geqslant 0$, nous définissons $K_d(x)$ comme le plus grand nombre entier k tel que

$$(k-d)k \leqslant dx\,,$$

inégalité qui équivaut à

$$\frac{x}{k} \leqslant \frac{x}{k-d} - 1$$

si $k > d$.

On a donc $K_0(x) = 0$ et en général

$$K_d(x) = \lfloor (d + \sqrt{d^2 + 4dx})/2 \rfloor.$$

En utilisant le fait que $t \mapsto (t-d)t$ est strictement croissante sur $[d/2, \infty[$, on démontre les relations

$$\begin{aligned} d \leqslant K_d(x) &\leqslant x + d \\ d + 1 \leqslant K_d(x) & \qquad\qquad (d > 0,\ x \geqslant 2) \\ 2d \leqslant K_d(x) &\leqslant x \qquad\quad (x \geqslant 2d) && (16) \\ \sqrt{dx} + d/2 - 1 < K_d(x) &\leqslant \sqrt{dx} + d && (17) \\ K_d(x) &< K_{d+1}(x). \end{aligned}$$

Nous utiliserons de plus des estimations des sommes $\sum 1$ et $\sum k^2$ portant sur les nombres entiers k de l'intervalle $]K_d(x), K_{d+1}(x)]$.

Proposition 2. *Pour* $0 \leqslant d \leqslant x$ *et* $x \geqslant 1$, *on a*

$$K_{d+1}(x) - K_d(x) = \big(\sqrt{d+1} - \sqrt{d}\,\big)\sqrt{x} + O(1).$$

Démonstration

Comme fonction de d, la quantité

$$\sqrt{d^2 + 4dx} - \sqrt{4dx} = \frac{1}{\sqrt{1/d^2 + 4x/d^3} + \sqrt{4x/d^3}}$$

est croissante. D'autre part, sa dérivée par rapport à d est

$$\begin{aligned}\frac{d+2x}{\sqrt{d^2+4dx}} - \sqrt{\frac{x}{d}} &= \frac{d\sqrt{d} + 2x\sqrt{d} - \sqrt{x(d^2+4dx)}}{\sqrt{d(d^2+4dx)}}\\ &\leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{d}{x}}.\end{aligned} \tag{18}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}K_{d+1}(x)-K_d(x) &= \big(d+1+\sqrt{(d+1)^2+4(d+1)x}\big)/2-\big(d+\sqrt{d^2+4dx}\big)/2+O(1)\\ &= \frac{1}{2}\big(\sqrt{4(d+1)x}-\sqrt{4dx}\big)+O\big(\sqrt{(d+1)/x}\big)+O(1) \quad \text{(d'après (18))}\\ &= \big(\sqrt{d+1}-\sqrt{d}\big)\sqrt{x}+O(1),\end{aligned}$$

si $d \leqslant x$ et $x \geqslant 1$. □

Notons que la proposition 2 entraîne l'estimation

$$K_{d+1}(x) - K_d(x) \ll \sqrt{x/(d+1)} \quad (0 \leqslant d \leqslant x,\ x \geqslant 1).$$

Proposition 3. *Pour* $0 \leqslant d \leqslant x$ *et* $x \geqslant 1$, *on a*

$$\sum_{K_d(x)<k\leqslant K_{d+1}(x)} k^2 = \frac{(d+1)\sqrt{d+1} - d\sqrt{d}}{3}\, x^{3/2} + O\big((d+1)x\big).$$

Démonstration

Si M et N sont des entiers naturels tels que $M \leqslant N$, on a

$$\sum_{M<k\leqslant N} k^2 = \frac{N-M}{6}\big(2(N^2+NM+M^2) + 3(N+M) + 1\big).$$

Avec $M = K_d(x)$ et $N = K_{d+1}(x)$, et compte tenu de (17) et de la proposition 2, cela donne,

$$\sum_{K_d<k\leqslant K_{d+1}} k^2 = \frac{(\sqrt{d+1}-\sqrt{d})\sqrt{x}+O(1)}{6}\big(2(2d+1+\sqrt{d(d+1)})x$$

$$+O\big((d+1)^{3/2}\sqrt{x}\big)\big) = \frac{(d+1)\sqrt{d+1}-d\sqrt{d}}{3}\,x^{3/2}+O\big((d+1)x\big).$$

□

Au moyen de la fonction $K_d(x)$, on peut récrire les conditions, quadratiques relativement à k, intervenant dans les définitions des ensembles $E_{d,i}(x)$, sous les formes suivantes, respectivement :

$$k \leqslant K_d(x) - 1 \qquad (i=1) \tag{19}$$

$$k > K_d(x) \qquad (i=2) \tag{20}$$

$$k = K_d(x) \qquad (i=3) \tag{21}$$

2.4.3. La fonction $N_d(x)$

Pour exprimer la quantité $|d - x/n(n+1)|$ sans valeur absolue, nous sommes conduits à définir, pour $d > 0$, $N_d(x)$ comme le plus grand nombre entier tel que

$$n(n+1) \leqslant x/d.$$

On a donc

$$N_d(x) = \lfloor(-1+\sqrt{1+4x/d}\,)/2\rfloor.$$

Notons les relations suivantes.

$$1 \leqslant N_d(x) \qquad (0 < d \leqslant x/2)$$

$$N_d(x) \leqslant \sqrt{x/d} \qquad (d>0,\, x \geqslant 0) \tag{22}$$

$$\sqrt{x/d} - 2 < N_d(x) \qquad (0 < d \leqslant x) \tag{23}$$

Établissons maintenant une relation entre les fonctions K_d et N_d (pour ces deux fonctions, nous omettons dorénavant la mention de la variable x afin d'alléger les notations).

PROPOSITION 4. *Pour d entier et x réel tels que $0 < d \leqslant x$, on a*

$$\lfloor x/(K_d+1)\rfloor \leqslant N_d \leqslant \lfloor x/K_d\rfloor.$$

Démonstration

Par définition de N_d, et comme $t \mapsto t(t+1)$ est strictement croissante pour $t \geqslant 0$, il suffit de vérifier que

$$\frac{x}{K_d+1}\Big(\frac{x}{K_d+1}+1\Big) < \frac{x}{d} \leqslant \frac{x}{K_d}\Big(\frac{x}{K_d}+1\Big).$$

Or cet encadrement équivaut au suivant :

$$(K_d-d)K_d \leqslant dx < (K_d+1-d)(K_d+1)\,,$$

lequel découle de la définition de K_d. □

2.4.4. Calcul de $W_{d,1}(x)$

En supposant $0 < d \leqslant x/2$, on a d'après (13), (16) et (19) :

$$W_{d,1}(x) = \sum_{d\leqslant k\leqslant K_d-1}\ \sum_{\frac{x}{k-d+1}-1<n\leqslant\frac{x}{k}} |d - x/n(n+1)|.$$

La somme intérieure est non vide seulement si

$$\frac{x}{k-d+1} - 1 < \frac{x}{k}\,,$$

autrement dit seulement si $k > K_{d-1}$ (rappelons que $K_0 = 0$). Les nombres entiers n intervenant dans cette somme intérieure sont strictement supérieurs à

$$\frac{x}{K_d-d} - 1 \geqslant \frac{x}{K_d} \geqslant N_d,$$

d'après la définition de K_d et la proposition 4.

Dans le calcul qui suit, ainsi qu'au paragraphe suivant, nous écrirons comme au §2.3 :

$$\frac{1}{\lfloor t\rfloor+1} = \frac{1}{\lfloor t\rfloor} - \varphi(t)\,,$$

et nous emploierons l'identité "r-télescopique" :

$$\sum_{a<k\leqslant b}(u_k-u_{k-r})=\sum_{b-r<k\leqslant b}u_k-\sum_{a-r<k\leqslant a}u_k.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
W_{d,1}(x)&=\sum_{K_{d-1}<k\leqslant K_d-1}\ \sum_{\frac{x}{k-d+1}-1<n\leqslant\frac{x}{k}}\Big(d-\frac{x}{n(n+1)}\Big)\\
&=\sum_{K_{d-1}<k\leqslant K_d-1}\bigg(d\big(\lfloor x/k\rfloor-\lfloor x/(k-d+1)\rfloor+1\big)-x\Big(\frac{1}{\lfloor x/(k-d+1)\rfloor}-\frac{1}{\lfloor x/k\rfloor+1}\Big)\bigg)\\
&=d\sum_{K_d-d<k\leqslant K_d-1}\lfloor x/k\rfloor-d\sum_{K_{d-1}-d+1<k\leqslant K_{d-1}}\lfloor x/k\rfloor+d(K_d-K_{d-1}-1)\\
&\quad+x\sum_{K_d-d<k\leqslant K_d-1}\frac{1}{\lfloor x/k\rfloor}-x\sum_{K_{d-1}-d+1<k\leqslant K_{d-1}}\frac{1}{\lfloor x/k\rfloor}-x\sum_{K_{d-1}<k\leqslant K_d-1}\varphi(x/k) \qquad (24)
\end{aligned}$$

où φ est définie par (9). Observons que, dans le cas où $d=1$, les quatre premières sommes $\sum$ du résultat de (24) sont vides.

2.4.5. Calcul de $W_{d,2}(x)$

En supposant toujours $0<d\leqslant x/2$, on a d'après (14) et (20) :

$$W_{d,2}(x)=\sum_{K_d<k\leqslant x}\ \sum_{\frac{x}{k+1}<n\leqslant\frac{x}{k-d}-1}|d-x/n(n+1)|$$

La somme intérieure est non vide seulement si

$$\frac{x}{k-d}-1\geqslant\frac{x}{k+1},$$

autrement dit seulement si $k\leqslant K_{d+1}-1$. Les nombres entiers n intervenant dans cette somme intérieure sont inférieurs ou égaux à

$$\Big\lfloor\frac{x}{K_d+1-d}-1\Big\rfloor\leqslant\Big\lfloor\frac{x}{K_d+1}\Big\rfloor\leqslant N_d,$$

d'après la définition de K_d et la proposition 4.

En supposant $d+1 \leqslant x/2$, on a donc

$$
\begin{aligned}
W_{d,2}(x) &= \sum_{K_d<k\leqslant K_{d+1}-1}\ \sum_{\frac{x}{k+1}<n\leqslant\frac{x}{k-d}-1}\big(x/n(n+1)-d\big)\\
&= \sum_{K_d<k\leqslant K_{d+1}-1}\Big(x\Big(\frac{1}{\lfloor x/(k+1)\rfloor+1}-\frac{1}{\lfloor x/(k-d)\rfloor}\Big)-d\big(\lfloor x/(k-d)\rfloor-\lfloor x/(k+1)\rfloor-1\big)\Big)\\
&= d\sum_{K_{d+1}-d-1<k\leqslant K_{d+1}}\lfloor x/k\rfloor-d\sum_{K_d-d<k\leqslant K_d+1}\lfloor x/k\rfloor+d(K_{d+1}-K_d-1)\\
&\quad +x\sum_{K_{d+1}-d-1<k\leqslant K_{d+1}}\frac{1}{\lfloor x/k\rfloor}-x\sum_{K_d-d<k\leqslant K_d+1}\frac{1}{\lfloor x/k\rfloor}-x\sum_{K_d+1<k\leqslant K_{d+1}}\varphi(x/k). \qquad (25)
\end{aligned}
$$

2.4.6. Calcul de $W_{d,3}(x)$

Pour $0<d\leqslant x$, on a d'après (15) et (21) :

$$
\begin{aligned}
W_{d,3}(x) &= \sum_{\frac{x}{K_d+1}<n\leqslant\frac{x}{K_d}}|d-x/n(n+1)|\\
&= W_{d,3}^-(x)+W_{d,3}^+(x),
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
W_{d,3}^-(x) &= \sum_{\frac{x}{K_d+1}<n\leqslant N_d}\Big(\frac{x}{n(n+1)}-d\Big)\\
W_{d,3}^+(x) &= \sum_{N_d<n\leqslant\frac{x}{K_d}}\Big(d-\frac{x}{n(n+1)}\Big)
\end{aligned}
$$

d'après la proposition 4. La somme $W_{d,3}^-(x)$ est vide si $N_d=\lfloor x/(K_d+1)\rfloor$.

On a

$$
\begin{aligned}
W_{d,3}^-(x) &= x\Big(\frac{1}{\lfloor x/(K_d+1)\rfloor+1}-\frac{1}{N_d+1}\Big)-d(N_d-\lfloor x/(K_d+1)\rfloor)\\
W_{d,3}^+(x) &= d(\lfloor x/K_d\rfloor-N_d)-x\Big(\frac{1}{N_d+1}-\frac{1}{\lfloor x/K_d\rfloor+1}\Big)\\
W_{d,3}(x) &= x\Big(\frac{1}{\lfloor x/(K_d+1)\rfloor+1}+\frac{1}{\lfloor x/K_d\rfloor+1}-\frac{2}{N_d+1}\Big)\\
&\quad -d(2N_d-\lfloor x/(K_d+1)\rfloor-\lfloor x/K_d\rfloor). \qquad (26)
\end{aligned}
$$

2.4.7. Calcul et estimation de $W_d(x)$

En ajoutant (24), (25) et (26) et en réduisant, on obtient pour $0 < d \leqslant x/2 - 1$:

$$\begin{aligned} W_d(x) &= W_{d,1}(x) + W_{d,2}(x) + W_{d,3}(x) \\ &= \sum_{K_{d+1}-d-1<k\leqslant K_{d+1}} \big(d\lfloor x/k\rfloor + x/\lfloor x/k\rfloor\big) - \sum_{K_{d-1}-d+1<k\leqslant K_{d-1}} \big(d\lfloor x/k\rfloor + x/\lfloor x/k\rfloor\big) \\ &\quad - x \sum_{K_{d-1}<k\leqslant K_{d+1}} \varphi(x/k) + d(K_{d+1} - K_{d-1} - 2) - \frac{2x}{N_d + 1} - 2dN_d. \qquad (27) \end{aligned}$$

Pour estimer les deux premières sommes de (27), nous utiliserons la proposition suivante.

PROPOSITION 5. *Pour* $0 < d \leqslant x/2$ *et* $K_d - d < k \leqslant K_d$, *on a*

$$d\lfloor x/k\rfloor + x/\lfloor x/k\rfloor = 2\sqrt{dx} + O(d^{3/2}x^{-1/2}).$$

Démonstration

Posons $q = \lfloor x/k\rfloor$. On a

$$dq + x/q - 2\sqrt{dx} = p^2,$$

où

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{dq} - \sqrt{x/q} \\ &= \frac{dq^2 - x}{q\big(\sqrt{dq} + \sqrt{x/q}\big)}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} q &= \lfloor x/k\rfloor \\ &= x/k + O(1) \\ &= \frac{x}{\sqrt{dx} + O(d)} + O(1) \quad \text{(d'après (17))} \\ &= \sqrt{x/d} + O(1). \qquad (28) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$dq^2 - x = O(\sqrt{dx})$$

$$p = O(d^{3/4}x^{-1/4})$$

et

$$dq + x/q - 2\sqrt{dx} = O(d^{3/2}x^{-1/2}). \qquad \square$$

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat suivant.

Proposition 6. *Pour $d > 0$ et $x > 0$, on a*

$$W_d(x) = f(d)\sqrt{x} + O(d),$$

où

$$f(d) = \frac{8d+2}{3}\sqrt{d+1} - \frac{8d-2}{3}\sqrt{d-1} - 4\sqrt{d}$$

Démonstration

Nous appliquons la proposition 5 en changeant d en $d+1$ et obtenons, si $0 < d \leqslant x/2 - 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{K_{d+1}-d-1<k\leqslant K_{d+1}} \big(d\lfloor x/k\rfloor + x/\lfloor x/k\rfloor\big) = \\ - \sum_{K_{d+1}-d-1<k\leqslant K_{d+1}} \lfloor x/k\rfloor + \sum_{K_{d+1}-d-1<k\leqslant K_{d+1}} \big(2\sqrt{(d+1)x} + O(d^{3/2}x^{-1/2})\big) \\ = (2d+1)\sqrt{(d+1)x} + O(d) + O(d^{5/2}x^{-1/2}),\end{aligned} \tag{29}$$

où l'on a utilisé (28) (avec d remplacé par $d+1$) pour évaluer l'avant-dernière somme.

De même,

$$\begin{aligned}\sum_{K_{d-1}-d+1<k\leqslant K_{d-1}} \big(d\lfloor x/k\rfloor + x/\lfloor x/k\rfloor\big) = \\ \sum_{K_{d-1}-d+1<k\leqslant K_{d-1}} \lfloor x/k\rfloor + \sum_{K_{d-1}-d+1<k\leqslant K_{d-1}} \big(2\sqrt{(d-1)x} + O(d^{3/2}x^{-1/2})\big) \\ = (2d-1)\sqrt{(d-1)x} + O(d) + O(d^{5/2}x^{-1/2}),\end{aligned} \tag{30}$$

résultat valable même si $d = 1$.

Maintenant, d'après la proposition 3, on a

$$\sum_{K_{d-1}<k\leqslant K_{d+1}} k^2 = \frac{(d+1)\sqrt{d+1}-(d-1)\sqrt{d-1}}{3}x^{3/2} + O(dx).$$

De plus,

$$\begin{aligned}\sum_{K_{d-1}<k\leqslant K_{d+1}} k^3 &\ll \sqrt{x/d}\cdot\sqrt{(dx)^3}\\ &= dx^2.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}x\sum_{K_{d-1}<k\leqslant K_{d+1}} \varphi(x/k) &= \frac{1}{x}\sum_{K_{d-1}<k\leqslant K_{d+1}} k^2 + O(x^{-2}\sum_{K_{d-1}<k\leqslant K_{d+1}} k^3)\\ &= \frac{(d+1)\sqrt{d+1}-(d-1)\sqrt{d-1}}{3}\sqrt{x} + O(d). \qquad (31)\end{aligned}$$

Le terme suivant de (27) peut être estimé grâce à la proposition 2. On a

$$d(K_{d+1}-K_{d-1}-2) = (d\sqrt{d+1}-d\sqrt{d-1})\sqrt{x} + O(d). \qquad (32)$$

Enfin, en utilisant (22) et (23), on a

$$\begin{aligned}-\frac{2x}{N_d+1} - 2dN_d &= -2\frac{x}{\sqrt{x/d}+O(1)} - 2d\big(\sqrt{x/d}+O(1)\big)\\ &= -4\sqrt{dx} + O(d) \qquad (33)\end{aligned}$$

En insérant maintenant (29), (30), (31), (32) et (33) dans (27), nous obtenons

$$W_d(x) = f(d)\sqrt{x} + O(d) + O(d^{5/2}x^{-1/2}) \quad (0 < d \leqslant x/2-1). \qquad (34)$$

Si $d \leqslant x^{1/3}$, le second terme d'erreur est absorbé par le premier. D'autre part, en utilisant l'approximation

$$\sqrt{d\pm 1} = \sqrt{d}\big(1 \pm 1/2d - 1/8d^2 + O(d^{-3})\big)\ ,$$

on voit que $f(d) = O(d^{-3/2})$. La majoration uniforme $W_d(x) \ll \sqrt{x/d}$ montre alors que

$$W_d(x) - f(d)\sqrt{x} \ll d \quad (d > x^{1/3}),$$

ce qui permet d'omettre définitivement le second terme d'erreur de (34) et la condition $d \leqslant x/2 - 1$. □

2.5. Sommation de la série des $f(d)$

Puisque $f(d) = O(d^{-3/2})$, la série $\sum_{d\geqslant 1} f(d)$ converge; nous allons calculer sa somme.

En écrivant

$$f(d) = \frac{8(d+1)-6}{3}\sqrt{d+1} - \frac{8(d-1)-6}{3}\sqrt{d-1} - 4\big(\sqrt{d-1} + \sqrt{d}\,\big)\,,$$

et en supposant D entier positif, on obtient

$$\sum_{d=1}^{D} f(d) = \frac{8(D+1)-6}{3}\sqrt{D+1} + \frac{8D-6}{3}\sqrt{D} - \frac{2}{3} - 8\sum_{d=1}^{D}\sqrt{d} + 4\sqrt{D}.$$

Or

$$\frac{8(D+1)-6}{3}\sqrt{D+1} = \frac{8}{3}D^{3/2} + 2D^{1/2} + O(D^{-1/2})$$

et la formule sommatoire d'Euler et Maclaurin donne

$$\sum_{d=1}^{D}\sqrt{d} = \frac{2}{3}D^{3/2} + \frac{1}{2}D^{1/2} + \zeta(-1/2) + O(D^{-1/2})$$

(cf. [4] (13·10·7), p. 333, et [3] chapter 7, (1·2), p. 150, (4·5), p. 156). On en déduit

$$\begin{aligned}\sum_{d=1}^{\infty} f(d) &= -\frac{2}{3} - 8\zeta(-1/2)\\ &= -\frac{2}{3} + \frac{2}{\pi}\zeta(3/2), \qquad (35)\end{aligned}$$

d'après l'équation fonctionnelle de la fonction ζ :

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\cos(\pi s/2)\Gamma(s)\zeta(s).$$

2.6. Conclusion

Pour $0 < x \leqslant 1$, on a $W(x) = x$. Pour $x > 1$ et $D \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}
W(x) &= W_0(x) + \sum_{1 \leqslant d \leqslant D} W_d(x) + \sum_{d > D} W_d(x) \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{x} + O(1) + \sum_{1 \leqslant d \leqslant D} \big(f(d)\sqrt{x} + O(d)\big) + O(\sqrt{x/D}) \\
&\qquad \text{(d'après (6) et les propositions 1 et 6)} \\
&= \Big(2/3 + \sum_{d=1}^{\infty} f(d)\Big)\sqrt{x} + O(D^2) + O\big(\sqrt{x/D}\,\big) \qquad (\text{car } f(d) = O(d^{-3/2})) \\
&= \frac{2}{\pi}\zeta(3/2)\sqrt{x} + O(x^{2/5}),
\end{aligned}$$

d'après (35), et en choisissant $D = 2x^{1/5}$.

3. Une remarque sur l'optimalité du terme d'erreur $O(\sqrt{x})$

Au §2 de [2], Bayart définit une fonction arithmétique α de la façon suivante. On construit d'abord une suite de nombres entiers par blocs en posant

$$\begin{aligned}
&M_n = 2^{4^n} \quad (n \geqslant 1) \\
&i_{k,n} = \lfloor M_n/k \rfloor \quad (1 \leqslant k \leqslant \sqrt{M_n}/2 = 2^{2^{2n-1}-1}).
\end{aligned}$$

Le plus petit élément $i_{k,n}$ du n^e bloc correspond à $k = \sqrt{M_n}/2$, et vaut $2\sqrt{M_n}$. On montre que les nombres $i_{k,n}$ vérifient l'égalité $\lfloor M_n/i_{k,n} \rfloor = k$; ils forment donc une suite strictement décroissante pour chaque valeur de n.

On pose ensuite

$$\alpha(m) = \begin{cases} (-1)^k & \text{si existent } n \text{ et } k \text{ tels que } m = i_{k,n} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $x > 0$ on a donc $A(x) = \sum_{n \leqslant x} \alpha(n) \in \{0, 1\}$.

Considérons maintenant la fonction arithmétique β définie par $\beta(n) = (-1)^{n-1}$. De même que pour α, la fonction sommatoire $B(x)$ de β ne prend que les valeurs 0 et 1; pour k entier, on a $B(k) = 0$ si k est pair, et $B(k) = 1$ si k est impair.

Posons ensuite $g = \alpha * \beta$. D'après le principe de l'hyperbole de Dirichlet, la fonction sommatoire G de g vérifie

$$G(x) = \sum_{n \leqslant \sqrt{x}} \alpha(n)B(x/n) + \sum_{n \leqslant \sqrt{x}} \beta(n)A(x/n) - B(\sqrt{x})A(\sqrt{x}),$$

donc

$$|G(x)| \leqslant 2\sqrt{x} + 1 \quad (x > 0). \tag{36}$$

Or pour $x = M_n$,

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{i \leqslant x} \alpha(i)B(x/i) \\ &= \sum_{i \leqslant 2\sqrt{x}-1} + \sum_{2\sqrt{x} \leqslant i \leqslant x} \\ &= S_1 + S_2, \text{ disons.} \end{aligned}$$

Dans S_1, tous les termes correspondants à $i > M_{n-1} = x^{1/4}$ sont nuls; par conséquent $|S_1| \leqslant x^{1/4}$.

Dans S_2 les termes $\alpha(i)$ non nuls correspondent exactement aux éléments $i_{k,n}$, et on a alors $B(x/i_{k,n}) = B(k)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant \sqrt{x}/2 \\ k \text{ impair}}} (-1)^k \\ &= -\sqrt{x}/4. \end{aligned}$$

On a donc

$$G(M_n) = \sum_{i \leqslant M_n} \alpha(i)B(M_n/i) \leqslant -\sqrt{M_n}/4 + M_n^{1/4} \quad (n \geqslant 1). \tag{37}$$

Maintenant, observons que $\beta = \gamma * \mathbf{1}$, où γ est la fonction arithmétique définie par $\gamma(1) = 1$, $\gamma(2) = -2$ et $\gamma(n) = 0$ pour $n > 2$, et posons $f = \alpha * \gamma$, de sorte que $g = \alpha * \beta = f * \mathbf{1}$.

Comme la fonction sommatoire de f, à savoir $F(x) = A(x) - 2A(x/2)$, est bornée, nous sommes dans la situation décrite dans l'introduction de cet article. On a donc

$$G(x) = Cx + O(\sqrt{x}), \tag{38}$$

avec $C = \sum_n f(n)/n$. La relation (36) prouve que $C = 0$, et (37) prouve que le $O(\sqrt{x})$ de (38) ne peut pas être remplacé par un $o(\sqrt{x})$.

Bibliographie

1. ***S. Banach, H. Steinhaus,*** *sur le principe de la condensation de singularités*, Fundam. Math., **9** (1927), 50–61.
2. ***F. Bayart,*** *the product of two Dirichlet series*, Acta Arith., **111** (2004), 141–152.
3. ***B. C. Berndt,*** *Ramanujan notebooks*, *Part* 1, Springer, Berlin, 1985.
4. ***G. H. Hardy,*** *Divergent series*, Oxford University Press, 1949.
5. ***A. Wintner,*** *Square root estimates of arithmetical sum functions*, Duke Math. J. **13** (1946), 185–193.

Michel Balazard

Aix Marseille Université, CNRS,
Centrale Marseille, I2M UMR 7373
13453, Marseille,
France
balazard@math.cnrs.fr